

$$1) \quad y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0, \quad y(1) = 1 \\ y(2) = -1$$

Nalezněte obecné řešení, řešení pro danou p.p. a určete pro které p.p. :

- řešení konverguje k 0
- řešení je omezené
- řešení má limitu $\pm \infty$

Nalezneme Fund. systém. Char. polynom
má tvar

$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2,$$

polynom má právě jeden kořen -2 násobnosti

2. Fundamentální systém má tvar
 $\{(-2)^n\}, \{n(-2)^n\}$.

Obecné řešení má tvar

$$y(n) = \alpha (-2)^n + \beta n (-2)^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$1 = y(1) = \alpha (-2) + \beta \cdot 1 \cdot (-2) = -2(\alpha + \beta)$$

$$-1 = y(2) = \alpha 4 + \beta \cdot 2$$

$$\Rightarrow 1 = 4\beta \quad \text{i.e.} \quad \beta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -1 = 4\alpha + 2 \quad \text{i.e.} \quad \alpha = -\frac{3}{4}$$

Obe cny řešení je $y(n) = (-2)^n (\alpha + \beta n)$.

Tedy pokud je alespoň jeden parametr nenulový, pak postupnost není omezená a nemá limitu (neří zřetěnkro).

$$2) \quad y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0, \quad y(1) = 7 \\ y(2) = -10$$

Nalezneme Fund. systém. Char. polynomial

má dva

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

má dva jednoduché kořeny 1, 2

Fundamentální systém má tvar

$$\{1\}, \{2^n\};$$

obecné řešení je

$$y(x) = \alpha + \beta \cdot 2^x \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dosa zeni'm p.p.

$$7 = y(1) = 2 + 2\beta$$

$$-10 = y(2) = 2 + 4\beta$$

$$\Rightarrow -17 = 2\beta \quad \text{i.e.} \quad \beta = -\frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow 7 = 2 - 17 \quad \text{i.e.} \quad 2 = 24$$

Tedy řešení pro danou p.p. je

$$y(n) = 24 - 17 \cdot 2^{n-1}$$

$$p \neq 0 \quad \alpha = \beta = 0 \quad \text{je} \quad f(n) = 0.$$

$$p \neq 0 \quad \alpha \neq 0, \beta = 0 \quad \text{je} \quad f(n) \text{ one zero' (konst.)}$$

$$p \neq 0 \quad \beta \neq 0 \quad \text{je} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \operatorname{sgn}(\beta) \cdot \infty.$$

$$\alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow f(1) = f(2) = 0$$

$$\alpha \neq 0, \beta = 0 \Leftrightarrow f(1) = \alpha \Leftrightarrow f(1) = f(2) \neq 0$$

$$f(2) = \alpha$$

$$\beta \neq 0 : \quad f(1) = 2 + 2\beta$$

$$f(2) = 2 + 4\beta$$

$$\Rightarrow f(2) - f(1) = 2\beta$$

$$\Rightarrow \frac{f(2) - f(1)}{2} = \beta$$

$$\text{polnnd } j \in \quad f(2) > f(1)$$

$$f(2) < f(1)$$

$$\text{polnnd } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$$

$$\text{polnnd } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = -\infty$$

$$3) 0 = y(n+4) - \frac{5}{2} y(n+3) - 4 y(n+2) + \frac{17}{2} y(n+1) - 3 y(n)$$

Hier das Fund. system. Char. polynom
máttur

$$\lambda^4 - \frac{5}{2} \lambda^3 - 4 \lambda^2 + \frac{17}{2} \lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 1) \left(\lambda^3 - \frac{3}{2} \lambda^2 - \frac{11}{2} \lambda + 3 \right) = 0$$

$$(\lambda - 1) (\lambda - 3) \left(\lambda^2 + \frac{3}{2} \lambda - 1 \right) = 0$$

$$(\lambda - 1) (\lambda - 3) (\lambda + 2) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Polynom má 4 jednoduché kořeny:
 $-2, 3, 1, \frac{1}{2}$. Fundamentální systém
má tvar

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}, \{1\}, \{3^n\}, \{(-2)^n\},$$

obecné řešení je

$$y(n) = \frac{\alpha}{2^n} + \beta + 3^n \mu + (-2)^n \delta.$$

$$\text{Platí: } \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\{1\} \text{ je konstanta, } \nrightarrow 0$$

$$\{3^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\{(-2)^n\} \text{ je konstanta a nemá limitu}$$

- $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ pak $f(n) = 0$
- $\beta = \gamma = \delta = 0$ pak $\lim f(n) = 0$
- $\gamma \neq 0$ pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \operatorname{sgn}(\gamma) \cdot \infty$

• $\mu = 0, \delta \neq 0$ $y(n)$ nemí omezená a
nemí limitu

• $\mu = \delta = 0$ $y(n)$ omezená,
 $\lim y(n) = \beta$.

Posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ odpovídá f.p. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} = x_1$

$\{1\}$ odpovídá $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2$

$\{3^n\}$ odpovídá $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \end{pmatrix} = x_3$

$\{(-2)^n\}$ odpovídá $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} = x_4$

Jak se bude řešení chovat poznamáme
vyjádřením g.p. vzhledem k bázi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$4) \quad y(n+2) + 2y(n+1) + 2y(n) = 0, \quad y(1) = y(2) = 1$$

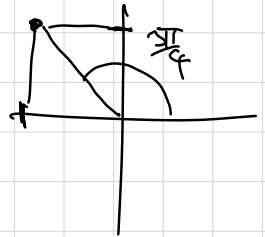
Chr. polynom:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Wörter jso, $\frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

Vg beal me $\xi = -1 + i$ jabo wöten s $\operatorname{Im}(\xi) > 0$.

PaL $|\xi| = \sqrt{2}$ a $\xi = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$



Fund. systém je

$$\left\{ (\sqrt{2})^n \cos\left(n \frac{3\pi}{4}\right) \right\}, \left\{ (\sqrt{2})^n \sin\left(n \frac{3\pi}{4}\right) \right\}$$

Obecné řešení :

$$y(n) = \alpha (\sqrt{2})^n \cos\left(n \frac{3\pi}{4}\right) + \beta (\sqrt{2})^n \sin\left(n \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$1 = \alpha \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \beta \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \beta - \alpha$$

$$1 = \alpha \cdot 2 \cdot 0 + \beta \cdot 2 \cdot (-1) = -2\beta$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

Obě posloupnosti mají podposloupnosti jdoucí

k $0, \infty, -\infty$. Navíc, k da mluví⁴ jsou

právě ty indexy k de dané posloupnosti
má podposloupnosti jdoucí k $\pm\infty$.

I.e. žc pokud je $\alpha \neq 0$, je
 $\gamma(n)$ neomezená a nemá limitu.